A Verteilungen

A.1 Diskrete Verteilungen

A.1.1 Diracverteilung (Kausalverteilung)

Bezeichnung: $X \sim \delta_c$

Parameter: $c \in \mathbb{R}$ (Lageparameter)

Merkmalraum: $M_X = \{c\}$

Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$W\{X = x\} = I_{\{c\}}(x)$$

Mittelwert:

$$\mathbb{E}(X) = c$$

Varianz:

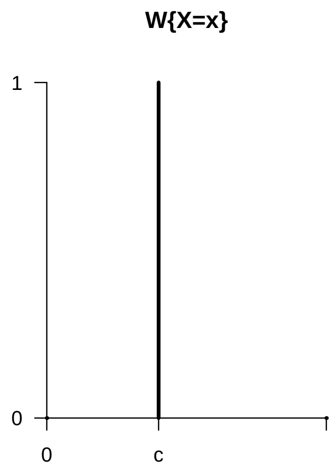
$$\mathrm{Var}(X) = 0$$

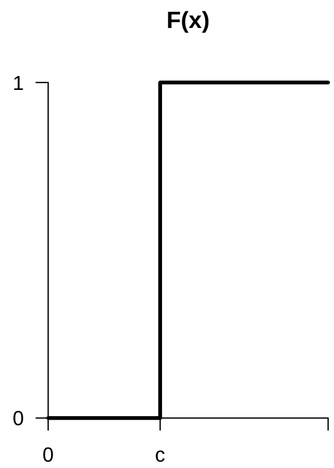
Momente:

$$\mathbb{E}(X^k) = c^k, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Momentenerzeugende Funktion:

$$m(t) = e^{tc}, \quad t \in \mathbb{R}$$





A.1.2 Uniforme Verteilung (Gleichverteilung)

Bezeichnung: $X \sim D_N$, $D(N)$

Parameter: $N \in \mathbb{N}$

Merkmalraum: $M_X = \{1, 2, \ldots, N\}$

Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$W\{X = x\} = \frac{1}{N} I_{\{1,2,\ldots,N\}}(x)$$

Mittelwert:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{N+1}{2}$$

Varianz:

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{N^2 - 1}{12}$$

Höhere Momente:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^3) &= \frac{N(N+1)^2}{4} \\ \mathbb{E}(X^4) &= \frac{(N+1)(2N+1)(3N^2+3N-1)}{30} \end{aligned}$$

Momentenerzeugende Funktion:

$$m(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} e^{tk}, \quad t \in \mathbb{R}$$

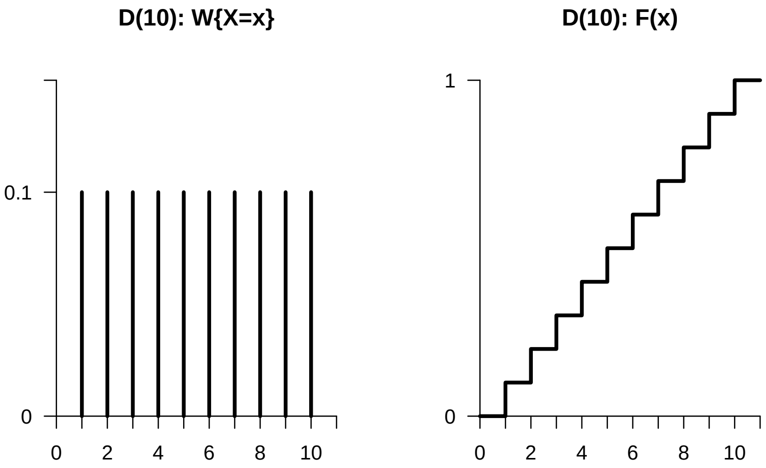
Verallgemeinerung: Diskrete uniforme Verteilung auf $M_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$: $X \sim D_{M_X}$

$$W\{X = x\} = \frac{1}{N} I_{\{x_1,x_2,\ldots,x_N\}}(x)$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} x_k = \overline{x}, \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} (x_k - \overline{x})^2$$

R–Funktionen: Zwei Beispiele zur Erzeugung von diskret uniform verteilten Zufallszahlen:

```
x <- sample(x=10, size=5, replace=TRUE) # N=10
x <- sample(x=c(-1,0,1,2,3,4,5,10,20), size=5, replace=TRUE) # Verallg.
```


D(10): W{X=x}
0.1
0
0
2
4
6
8
10
D(10): F(x)
1
0
0
2
4
6
8
10

A.1.3 Alternativverteilung (Bernoulliverteilung)

Bezeichnung: $X \sim A_p,\ A(p)$

Parameter: $p \in (0,1)$ (Formparameter), $q := 1-p$

Merkmalraum: $M_X = \{0,1\}$

Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$W\{X = x\} = p^x (1-p)^{1-x} = p^x q^{1-x}, \quad x = 0,1$$

Mittelwert:

$$\mathbb{E}(X) = p$$

Varianz:

$$\mathrm{Var}(X) = p(1-p) = pq$$

Momente:

$$\mathbb{E}(X^k) = p, \quad k = 1,2,\ldots$$

Momentenerzeugende Funktion:

$$m(t) = 1 - p + pe^t = q + pe^t, \quad t \in \mathbb{R}$$

Modus:

$$x_{\mathrm{mod}} = \begin{cases} 0 & p \leq 0.5 \\ 1 & p \geq 0.5 \end{cases}$$

Additionstheorem: $X_i \sim A_p,\ i = 1,\ldots,n,$ ua.:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \ \sim\ B_{n,p}$$

ZGVS: $X_i \sim A_p,\ i = 1,\ldots,n,$ ua.; für $np(1-p) > 9$ gilt in guter Näherung:

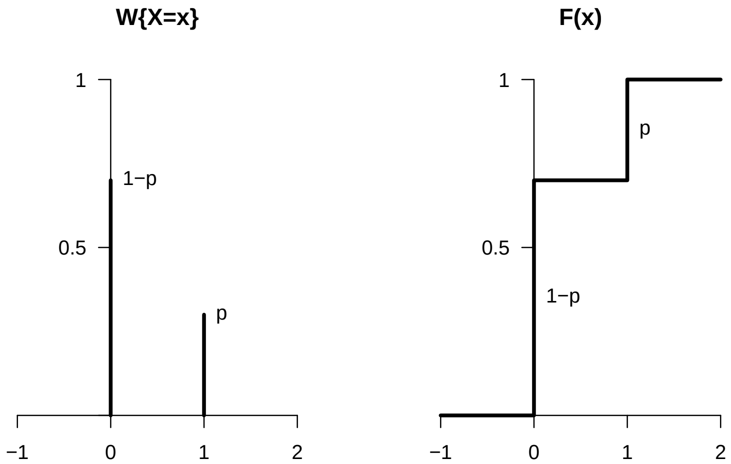
$$\sum_{i=1}^{n} X_i \ \dot{\sim}\ N\big(np, np(1-p)\big)$$

R–Funktionen: `prob` $\widehat{=}\, p$

```
dbinom(x, size=1, prob, log = FALSE)
pbinom(q, size=1, prob, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
qbinom(p, size=1, prob, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
rbinom(n, size=1, prob)
```

Alternative zu `rbinom`:

```
x <- sample(0:1, size, replace=TRUE, prob)
```



A.1.4 Binomialverteilung

Bezeichnung: $X \sim B_{n,p},\ B(n,p)$

Parameter: $n \in \mathbb{N},\ p \in (0,1)$ (Formparameter), $q := 1-p$

Merkmalraum: $M_X = \{0, 1, \ldots, n\}$

Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$W\{X = x\} = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \quad x = 0, 1, \ldots, n$$

Mittelwert:

$$\mathbb{E}(X) = np$$

Varianz:

$$\mathrm{Var}(X) = np(1-p) = npq$$

Höhere zentrale Momente:

$$\mathbb{E}\big[X - \mathbb{E}(X)\big]^3 = npq(q-p)$$
$$\mathbb{E}\big[X - \mathbb{E}(X)\big]^4 = 3n^2p^2q^2 + npq(1-6pq)$$

Momentenerzeugende Funktion:

$$m(t) = (1 - p + pe^t)^n = (q + pe^t)^n, \quad t \in \mathbb{R}$$

Modus:

$$x_{\mathrm{mod}} = \begin{cases} \lfloor (n+1)p \rfloor & (n+1)p \notin \mathbb{N} \\ (n+1)p - 1,\ (n+1)p & (n+1)p \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Spezialfall: $B_{1,p} \equiv A_p$

Additionstheorem: $X_k \sim B_{n_k,p},\ k = 1, 2, \ldots, K,$ ua.:

$$\sum_{k=1}^{K} X_k \sim B_{n,p}, \quad n = \sum_{k=1}^{K} n_k$$

Poissonapproximation: Für $n \geq 50$, $p \leq 1/10$, $np \leq 10$ gilt in guter Näherung:

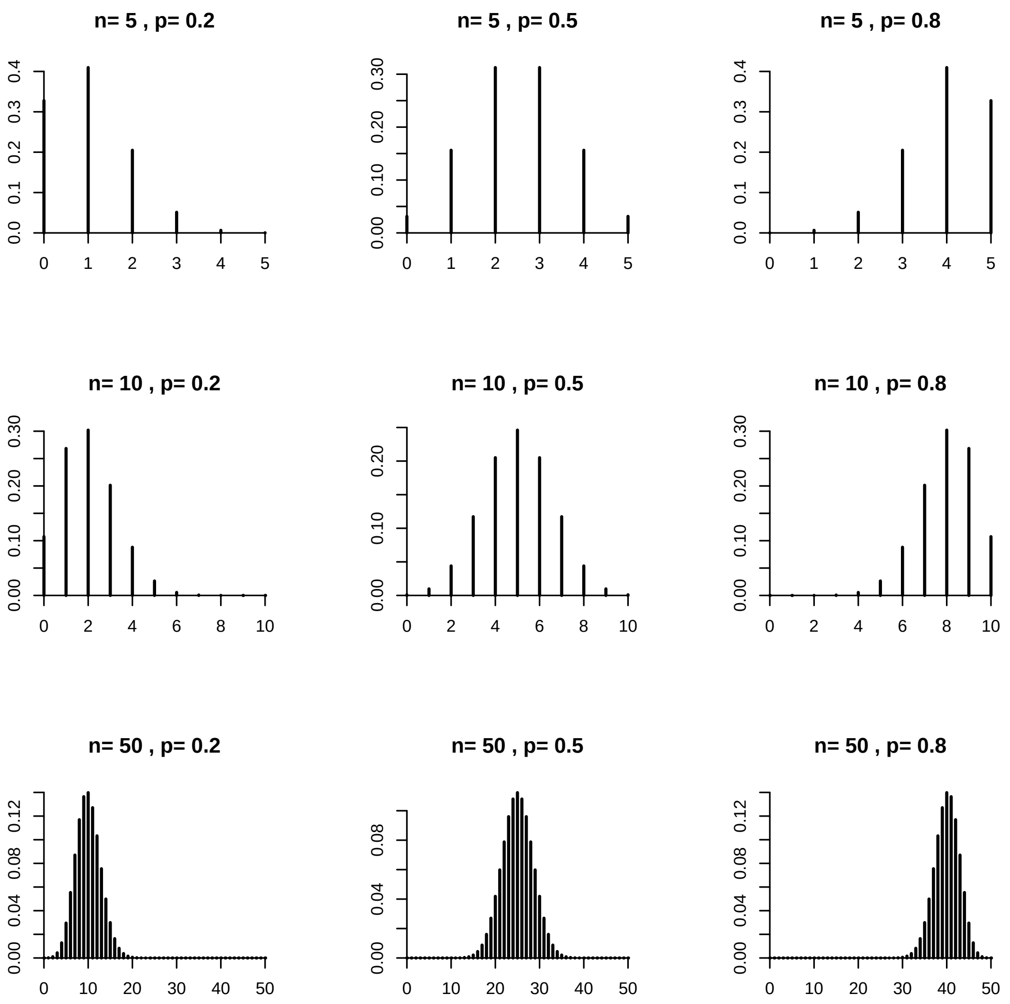
$$B_{n,p} \ \approx \ P_\mu,\ \mu = np : \quad W\{X = x\} \ \approx \ \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!}$$

ZGVS: Für $np(1-p) > 9$ gilt in guter Näherung ($a, b, x \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $a < b$):

$$W\{X = x\} \approx \Phi\left(\frac{x + 0.5 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{x - 0.5 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$
$$W\{a \leq X \leq b\} \approx \Phi\left(\frac{b + 0.5 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{a - 0.5 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

R–Funktionen: `size` $\widehat{=}\, n$, `prob` $\widehat{=}\, p$

```
choose(n, k)  # Binomialkoeff.
dbinom(x, size, prob, log = FALSE)
pbinom(q, size, prob, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
qbinom(p, size, prob, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
rbinom(n, size, prob)
```



A.1.5 Hypergeometrische Verteilung

Bezeichnung: $X \sim H_{N,A,n}$, $H(N,A,n)$

Parameter: $N, A, n \in \mathbb{N}$ (Formparameter), $A \leq N$, $n \leq N$, $p := A/N$, $q := 1 - p$

Merkmalraum: $M_X = \{a_1, \ldots, a_2\}$, $a_1 = \max\{0, n - (N - A)\}$, $a_2 = \min\{n, A\}$

Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$W\{X = x\} = \frac{\binom{A}{x}\binom{N-A}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \quad x = a_1, \ldots, a_2$$

Mittelwert:

$$\mathbb{E}(X) = n\,\frac{A}{N}$$

Varianz:

$$\mathrm{Var}(X) = n\,\frac{A}{N}\left(1 - \frac{A}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}$$

Faktorielle Momente:

$$\mathbb{E}\big[X(X-1)\cdots(X-k+1)\big] = k!\,\frac{\binom{A}{k}\binom{n}{k}}{\binom{N}{k}}, \quad k \in \mathbb{N}$$

Modus:

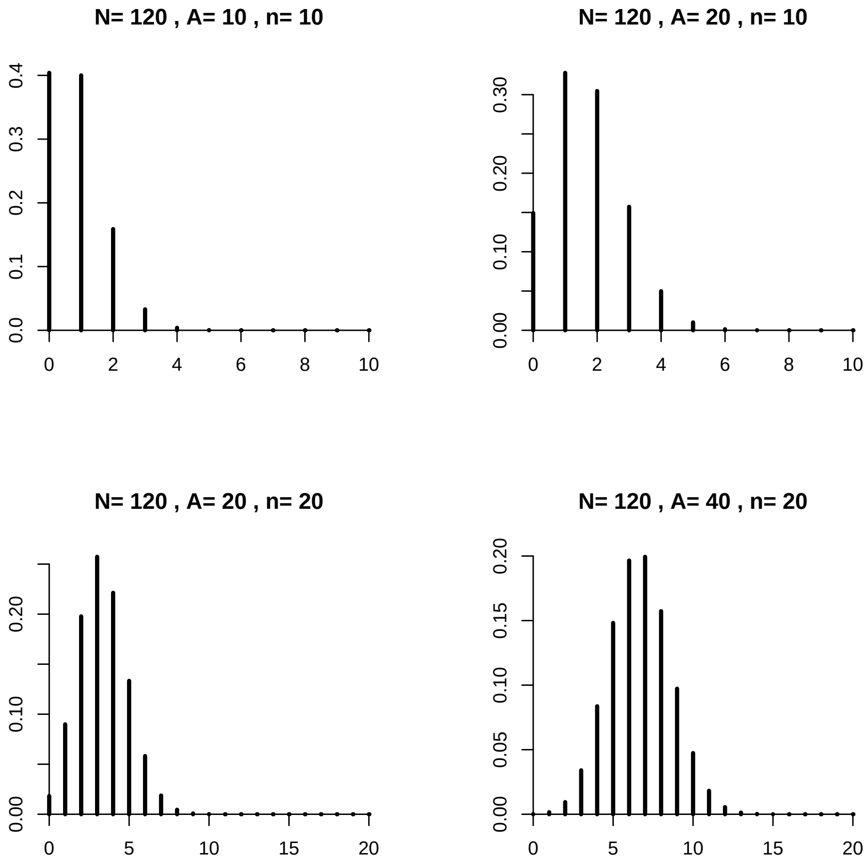
$$x_{\text{mod}} = \begin{cases} \left\lfloor (n+1)\dfrac{A+1}{N+2} \right\rfloor & (n+1)\dfrac{A+1}{N+2} \notin \mathbb{N} \\ (n+1)\dfrac{A+1}{N+2} - 1,\ (n+1)\dfrac{A+1}{N+2} & (n+1)\dfrac{A+1}{N+2} \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Binomialapproximation: Für A, $N - n$ groß und $n/N \leq 0.05$ gilt in guter Näherung:

$$H_{N,A,n} \ \approx\ B_{n,p}: \quad W\{X = x\} \ \approx\ \binom{n}{x}\left(\frac{A}{N}\right)^x \left(1 - \frac{A}{N}\right)^{n-x}$$

R–Funktionen: `m` $\widehat{=} A$, `n` $\widehat{=} N - A$, `k` $\widehat{=} n$

```
dhyper(x, m, n, k, log = FALSE)
phyper(q, m, n, k, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
qhyper(p, m, n, k, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
rhyper(nn, m, n, k)
```


N= 120 , A= 10 , n= 10
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0 2 4 6 8 10
N= 120 , A= 20 , n= 10
0.00
0.10
0.20
0.30
0 2 4 6 8 10
N= 120 , A= 20 , n= 20
0.00
0.10
0.20
0 5 10 15 20
N= 120 , A= 40 , n= 20
0.00
0.05
0.10
0.15
0.20
0 5 10 15 20

A.1.6 Poissonverteilung

Bezeichnung: $X \sim P_\mu,\ P(\mu)$

Parameter: $\mu \in \mathbb{R}^+$ (Formparameter)

Merkmalraum: $M_X = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$

Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$W\{X = x\} = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

Mittelwert:

$$\mathbb{E}(X) = \mu$$

Varianz:

$$\mathrm{Var}(X) = \mu$$

Höhere zentrale Momente:

$$\mathbb{E}\big[X - \mathbb{E}(X)\big]^3 = \mu$$
$$\mathbb{E}\big[X - \mathbb{E}(X)\big]^4 = \mu + 3\mu^2$$

Momentenerzeugende Funktion:

$$m(t) = \exp\big[\mu(e^t - 1)\big], \quad t \in \mathbb{R}$$

Modus:

$$x_{\text{mod}} = \begin{cases} \lfloor \mu \rfloor & \mu \notin \mathbb{N} \\ \mu - 1,\ \mu & \mu \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Additionstheorem: $X_k \sim P_{\mu_k},\ k = 1, 2, \ldots, K,$ ua.:

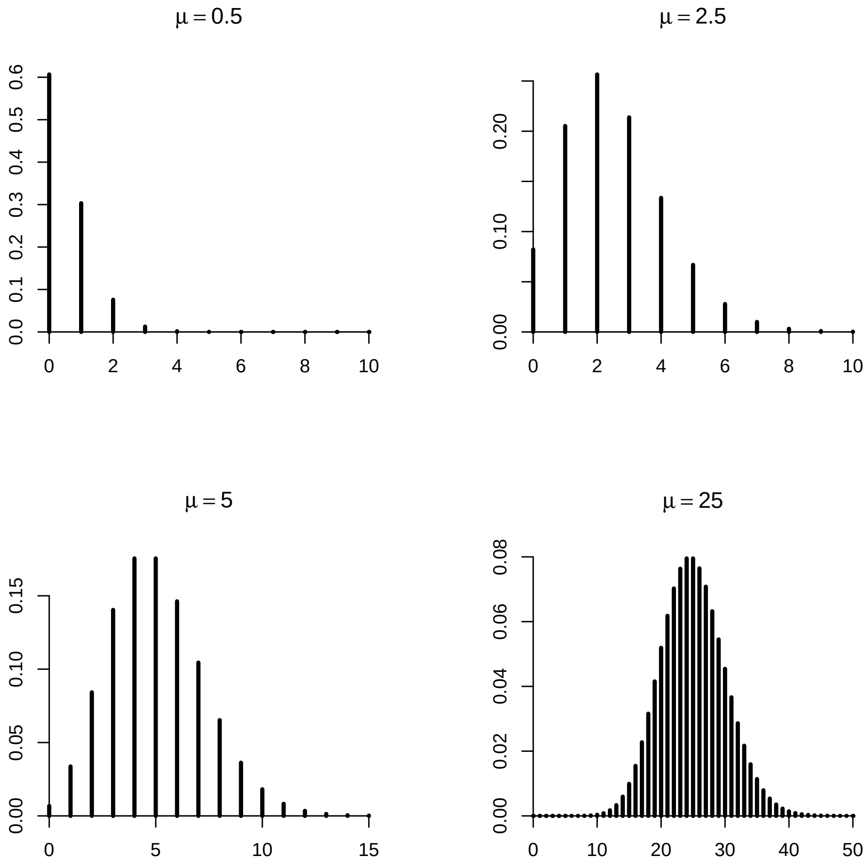
$$\sum_{k=1}^{K} X_k \sim P_\mu, \quad \mu = \sum_{k=1}^{K} \mu_k$$

ZGVS: Für $\mu > 9$ gilt in guter Näherung ($a, b, x \in \mathbb{N}_0$, $a < b$):

$$W\{X = x\} \approx \Phi\left(\frac{x + 0.5 - \mu}{\sqrt{\mu}}\right) - \Phi\left(\frac{x - 0.5 - \mu}{\sqrt{\mu}}\right)$$
$$W\{a \le X \le b\} \approx \Phi\left(\frac{b + 0.5 - \mu}{\sqrt{\mu}}\right) - \Phi\left(\frac{a - 0.5 - \mu}{\sqrt{\mu}}\right)$$

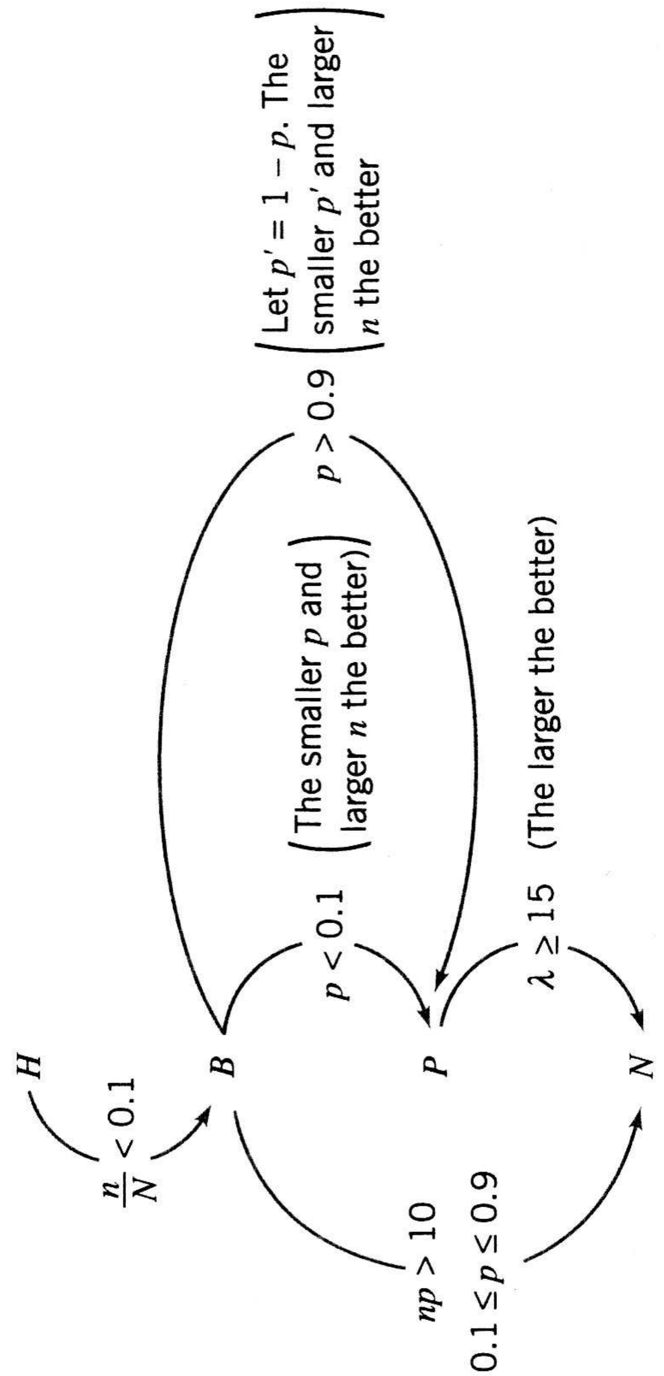
R–Funktionen: `lambda` $\widehat{=}\ \mu$

```
dpois(x, lambda, log = FALSE)
ppois(q, lambda, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
qpois(p, lambda, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
rpois(n, lambda)
```



Zusatz: Die folgende Übersicht (aus D.C. Montgomery: *Introduction to Statistical Quality Control*, 5e, 2005) zeigt einige wichtige Approximationen von diskreten Verteilungen und ihre Bedingungen. Dabei werden die folgenden Bezeichnungen verwendet:

H = Hypergeometrische Verteilung
B = Binomialverteilung
P = Poissonverteilung ($\lambda \equiv \mu$)
N = Normalverteilung



A.1.7 Geometrische Verteilung (Pascalverteilung)

Bezeichnung: $X \sim G_p$, $G(p)$

Parameter: $p \in (0,1)$, $q := 1-p$

Merkmalraum: $M_X = \mathbb{N}$ (1. Version); $M_{X'} = \mathbb{N}_0$ (2. Version)

Wahrscheinlichkeitsfunktion:

1. Version: X = Zahl der Versuche bis zum ersten Erfolg

$$W\{X = x\} = p(1-p)^{x-1} = pq^{x-1}, \quad x = 1, 2, \ldots$$

2. Version: $X' = X - 1$ = Zahl der Mißerfolge vor dem ersten Erfolg

$$W\{X' = x\} = p(1-p)^{x} = pq^{x}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

Mittelwert:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}, \qquad \mathbb{E}(X') = \mathbb{E}(X) - 1 = \frac{1-p}{p} = \frac{q}{p}$$

Varianz:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(X') = \frac{1-p}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

Momentenerzeugende Funktion:

$$m_X(t) = \frac{p\,e^t}{1-qe^t}, \quad t < -\ln q$$
$$m_{X'}(t) = \frac{p}{1-qe^t}, \quad t < -\ln q$$

Modus:

$$X: \ x_{\mathrm{mod}} = 1, \qquad X': \ x'_{\mathrm{mod}} = 0$$

Additionstheorem: $X_k \sim G_p, \ k = 1, 2, \ldots, K,$ ua.:

$$\sum_{k=1}^{K} X_k \sim NB_{K,p}$$

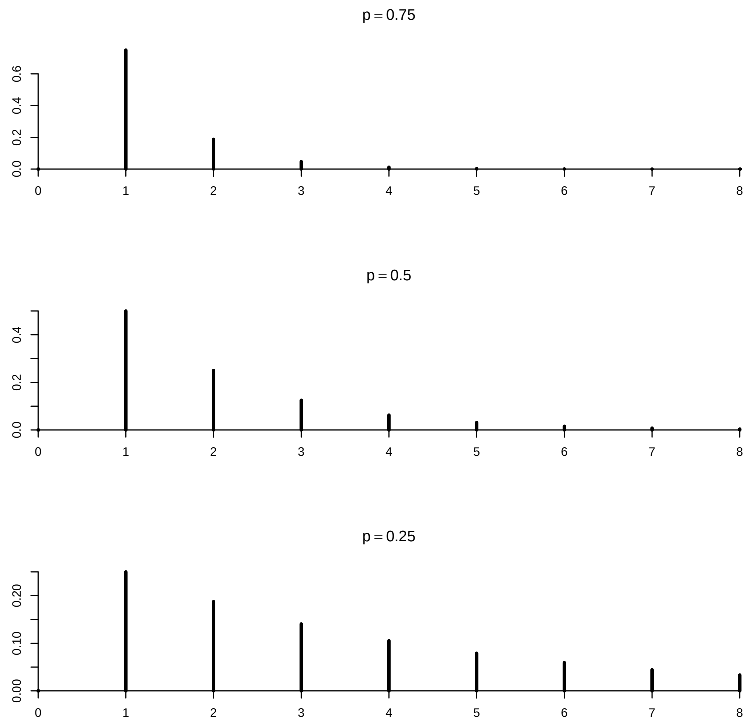
Gedächtnislosigkeit:

$$W\{X > a + b | X > a\} = W\{X > b\}, \quad a, b \in \mathbb{N}$$

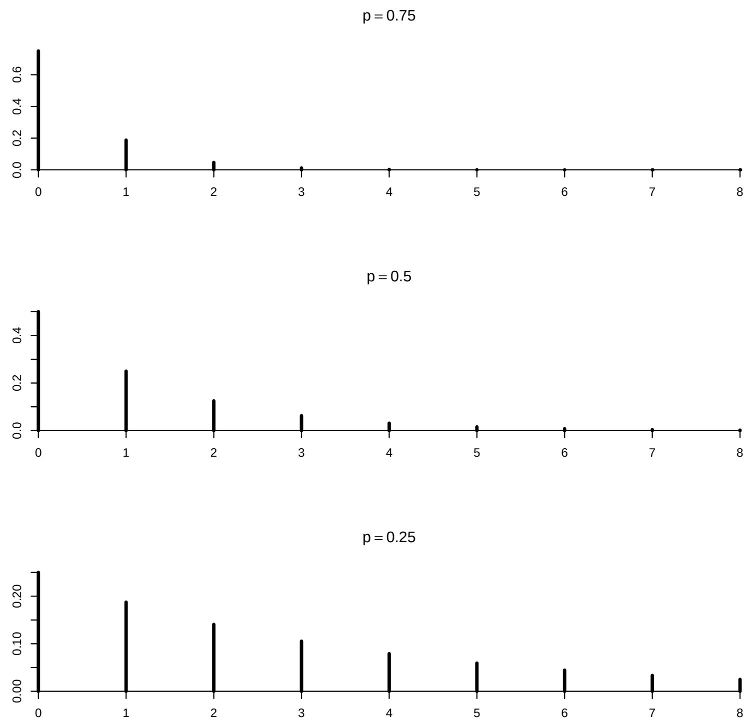
R–Funktionen: Die Funktionengruppe `geom` entspricht der 2. Version der geometrischen Verteilung.

```
dgeom(x, prob, log = FALSE)
pgeom(q, prob, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
qgeom(p, prob, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
rgeom(n, prob)
```

1. Version



2. Version



A.1.8 Negative Binomialverterteilung

Bezeichnung: $X \sim NB_{r,p}$, $NB(r,p)$

Parameter: $p \in (0,1)$, $q := 1-p$, $r \in \mathbb{N}$ (Formparameter)

Merkmalraum: $M_X = \{r, r+1, \ldots\}$ (1. Version); $M_{X'} = \mathbb{N}_0$ (2. Version)

Wahrscheinlichkeitsfunktion:

1. Version: X = Zahl der Versuche bis zum r–ten Erfolg

$$W\{X = x\} = \binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r}, \quad x = r, r+1, \ldots$$

2. Version: $X^{'} = X - r$ = Zahl der Mißerfolge vor dem r–ten Erfolg

$$W\{X^{'} = x\} = \binom{r+x-1}{r-1} p^r q^x, \quad x = 0, 1, \ldots$$

Mittelwert:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{r}{p}, \qquad \mathbb{E}(X^{'}) = \mathbb{E}(X) - r = \frac{r(1-p)}{p} = \frac{rq}{p}$$

Varianz:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(X^{'}) = \frac{r(1-p)}{p^2} = \frac{rq}{p^2}$$

Momentenerzeugende Funktion:

$$m_X(t) = \left(\frac{p\,e^t}{1-qe^t}\right)^r, \quad t < -\ln q$$
$$m_{X'}(t) = \left(\frac{p}{1-qe^t}\right)^r, \quad t < -\ln q$$

Modus:

$$X:\ x_{\text{mod}} = \begin{cases} \left\lfloor \dfrac{r-1}{p} \right\rfloor + 1 & \dfrac{r-1}{p} \notin \mathbb{N} \\[2ex] \dfrac{r-1}{p}, \dfrac{r-1}{p} + 1 & \dfrac{r-1}{p} \in \mathbb{N} \end{cases} \qquad (r > 1)$$

$$X^{'}:\ x^{'}_{\text{mod}} = x_{\text{mod}} - r$$

Spezialfall: $NB_{1,p} \equiv G_p$

Additionstheorem: $X_k \sim NB_{r_k,p},\ k = 1, 2, \ldots, K,$ ua.:

$$\sum_{k=1}^{K} X_k \sim NB_{r,p}, \quad r = \sum_{k=1}^{K} r_k$$

Beziehung zur Binomialverteilung: Für $X \sim NB_{r,p}$ (1. Version) und $Y \sim B_{x,p}$, $x \in \mathbb{N}$, gilt:

$$W\{X > x\} = W\{Y < r\}$$

R–Funktionen: Die Funktionengruppe `nbinom` entspricht der 2. Version der negativen Binomialverteilung.

`size` $\widehat{=}\, r$, `mu` $\widehat{=}\, r(1-p)/p =$ Mittelwert (alternative Parametrisierung)

```
dnbinom(x, size, prob, mu, log = FALSE)
pnbinom(q, size, prob, mu, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
qnbinom(p, size, prob, mu, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
rnbinom(n, size, prob, mu)
```

2. Version